DRŽAVNA SMOTRA I NATJECANJE MLADIH FIZIČARA
Poreč, 8. - 11. svibnja 2008.

Srednje škole – 2. grupa

Rješenja

1. zadatak (19 bodova)

Primjenom Bernullijevog teorema na gornju površinu vode (*v, h*) i otvor na dnu posude kroz koji teče voda (*v', h'*= 0) dobivamo:

$$\frac{v^2}{2} + gh = \frac{v'^2}{2} + g0 \quad \textbf{(1 bod)}$$

Zbog velikog omjera površina, brzina *v* je zanemarivo malena naspram *v'*, pa dobivamo:

$$v'^2 = 2gh$$

$$v' = \sqrt{2gh} \quad \textbf{(1 bod)}$$

Iz jednadžbe kontinuiteta dobivamo:

$$S'v' = Sv$$

$$v = \frac{S'v'}{S} = \frac{S'}{S}\sqrt{2gh} = \sqrt{2\left(\frac{S'}{S}\right)^2 gh} \quad \textbf{(2 boda)}$$

Visina *h* vode u posudi pada brzinom *v* danom gornjim izrazom – riječ je o jednolikom usporenom gibanju nivoa vode deceleracijom koja je jednaka $a=g(S'/S)^2$ **(2 bod)**.

a) Ukupno vrijeme isticanja vode jednako je tada:

$$T = \sqrt{\frac{2h_0}{a}} = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}\frac{S}{S'} = 451.5 \text{ s} \quad \textbf{(4 boda)}$$

b) Koristimo formule za jednoliko usporeno gibanje:

$$\Delta h = v_0 t - \frac{a}{2}t^2 \quad \textbf{(1 bod)}$$

Nakon 40 s gibanja deceleracijom:

$$a = g\left(\frac{S'}{S}\right)^2 = 9.81\left(\frac{0.5}{500}\right)^2 = 0.98 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}^2$$

i s početnom brzinom:

$$v_0 = \frac{S'}{S}\sqrt{2ah_0} = \frac{0.5}{500}\sqrt{2 \cdot 9.81 \cdot 1} = 4.32 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}$$

početna visina nivoa vode smanjit će se za:

$$\Delta h = v_0 t - \frac{a}{2}t^2 = 4.32 \cdot 10^{-3} \cdot 40 - \frac{0.98 \cdot 10^{-5}}{2} \cdot 40^2 = 165 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Nivo vode spustit će se do visine 0.835 m **(3 boda)**.

c) Pri ubrzavanju prema gore „*g*“ u dijelu zadatka a) treba zamijeniti s „*g+A*“, a pri usporavanju s „*g-A*“, gdje je *A*= 4 m/s^2. **(1 bod)**

Nakon 20 s gibanja deceleracijom:

$$a_1 = (g + A)\left(\frac{S'}{S}\right)^2 = (9.81 + 4)\left(\frac{0.5}{500}\right)^2 = 1.38 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}^2$$

početna brzina spuštanja nivoa vode:

$$v_{01} = \frac{S'}{\mathrm{S}}\sqrt{2a_1h_{01}} = \frac{0.5}{500}\sqrt{2 \cdot 13.81 \cdot 1} = 5.26 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}$$

smanjit će se za:

$$\Delta v = a_1 t = 1.38 \cdot 10^{-5} \cdot 20 = 2.76 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}$$

a početna visina nivoa vode smanjit će se za:

$$\Delta h_1 = v_{01}t - \frac{a_1}{2}t^2 = 5.26 \cdot 10^{-3} \cdot 20 - \frac{1.38 \cdot 10^{-5}}{2} \cdot 20^2 = 102.4 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$ **(1 bod)**

Slijedi 20 s gibanja deceleracijom:

$$a_2 = (g - A)\left(\frac{S'}{S}\right)^2 = (9.81 - 4)\left(\frac{0.5}{500}\right)^2 = 0.58 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}^2$$

Početna visina nivoa vode za ovo gibanje je h_{02}= (1-0.102) m, a početna brzina:

$$v_{02} = \frac{S'}{\mathrm{S}}\sqrt{2a_2h_{02}} = \frac{0.5}{500}\sqrt{2 \cdot 5.81 \cdot 0.898} = 3.23 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}$$

Dobivamo:

$$\Delta h_2 = v_{02}t - \frac{a_2}{2}t^2 = 3.23 \cdot 10^{-3} \cdot 20 - \frac{0.58 \cdot 10^{-5}}{2} \cdot 20^2 = 63.4 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$ **(1 bod)**

Konačna visina nivoa vode nakon 20+20 s je $h_{kon}= h_{02}-\Delta h_2$= (1-0.102-0.063)= 0.835 m **(2 boda)**, u prvoj aproksimaciji jednak rezultatu pod b).

2. zadatak (17 bodova)

a) Kad se u izraz za *M(r)* uvrsti *r=R*, dobiva se ukupna masa Sunca *M*:

$$M(R) = \frac{4\pi}{3}\rho_{\max}R^3\left(1 - \frac{3R}{4R}\right) = \frac{\pi}{3}\rho_{\max}R^3 = M$$ **(1 bod)**

iz čega se dobiva:

$$\rho_{\max} = \frac{3M}{\pi R^3} = 5.6 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$$ **(2 boda)**

b) Promotrimo volumen na slici; ako su sile u ravnoteži, mora vrijediti:

$$P(r_1)A = P(r_2)A + G\frac{M(r_1)\rho(r)A\Delta r}{r^2}$$ **(2 boda)**

jer na promatrani volumen gravitacijski djeluje samo masa Sunca koja se nalazi do polumjera r_1; tu masu računamo iz izraza u zadatku:

$$M(r_1) = \frac{4\pi}{3}\rho_{\max}r_1^3\left(1 - \frac{3r_1}{4R}\right) = 6.3 \cdot 10^{29} \text{ kg}$$ **(1 bod)**

$$\rho(r) = \rho_{\max}\left(1 - \frac{r}{R}\right) = 2.8 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$$ **(1 bod)**

$$P(r_1)-P(r_2)=G\frac{M(r_1)\rho(r)\Delta r}{r^2}=9.6\cdot 10^{11}\ \text{Pa}$$ **(1 bod)**

Dakle, porast tlaka pri pomaku $\Delta r = 10^3$ km od površine Sunca prema njegovom središtu je $9.6 \cdot 10^{11}$ Pa. Pretpostavimo li da je porast tlaka isti za svakih $\Delta r = 10^3$ km, ukupan porast tlaka od površine (gdje je tlak jednak nuli) do središta Sunca je:

$$9.6 \cdot 10^{11}\ \text{Pa} \cdot R / \Delta r = 9.6 \cdot 10^{11}\ \text{Pa} \cdot 700 = 6.7 \cdot 10^{14}\ \text{Pa}$$ **(2 boda)**

(sofisticiraniji modeli predviđaju tlak u središtu Sunca od oko 10^{16} Pa).

c) Molarna masa plina koji se sastoji od 74% vodika, 25% helija i 1% kisika (po masi) je:

$$\mu = 0.74\cdot 1+0.25\cdot 4+0.01\cdot 16=1.9\ \text{g/mol}.$$ **(1 bod)**

Za idealni plin vrijedi:

$$PV=nRT$$ **(1 bod)**

$$PV=\frac{m}{\mu}RT$$ **(1 bod)**

$$T=\frac{P\mu}{\rho R}$$ **(2 bod)**

Uvrštavanjem vrijednosti za središte Sunca dobiva se:

$$T=\frac{P\mu}{\rho R}=\frac{6.7\cdot 10^{14}\cdot 1.9\cdot 10^{-3}}{5.6\cdot 10^{3}\cdot 8.314}=2.7\cdot 10^{7}\ \text{K}$$ **(2 boda)**

Dobivena vrijednost je otprilike 2 puta veća od standardno prihvaćene temperature središta Sunca, no s obzirom na jednostavnost modela i zanemarivanje mnogih faktora (način prijenosa energije, promjena kemijskog sastava po dubini, ionizacija plazme, ...) rezultat je i više nego zadovoljavajući.

3. zadatak (17 bodova)

Kapacitet pločastog kondenzatora računamo iz izraza:

$$C(t_1)=\varepsilon_0\varepsilon_r\frac{S}{d}$$ **(2 boda)**

Zagrijavanjem se i ploče kondenzatora i izolator među pločama šire (širenje u smjeru okomitom na ploče ne utječe na promjene kapaciteta). Materijal od kojeg su napravljene ploče kondenzatora ima veći koeficijent toplinskog rastezanja pa će se ploče kondenzatora raširiti više nego izolator među njima. Drugim riječima, veći dio prostora među pločama kondenzatora bit će ispunjen izolatorom, ali ne čitav – efektivno ćemo dobiti dva paralelno spojena kondenzatora **(4 boda)**:

$$C_1=\varepsilon_0\varepsilon_r\frac{S_i}{d}=\varepsilon_0\varepsilon_r\frac{S\cdot(1+\alpha_i\Delta t)^2}{d}$$ **(3 boda)**

$$C_2=\varepsilon_0\frac{S_p-S_i}{d}=\varepsilon_0\frac{S\cdot(1+\alpha_p\Delta t)^2-S\cdot(1+\alpha_i\Delta t)^2}{d}$$ **(3 boda)**

Za paralelni spoj vrijedi:

$C_{uku}= C_1+C_2$, **(1 bod)**

pa se dobiva:

$$C(t_2) = \varepsilon_0 \frac{S}{d}\left[(1+\alpha_p \Delta t)^2 + (1+\alpha_i \Delta t)^2 (\varepsilon_r - 1)\right]$$

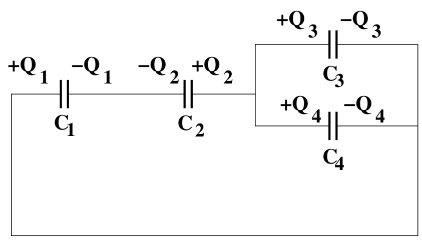
$$C(t_2) = \frac{C(t_1)}{\varepsilon_r}\left[(1+\alpha_p \Delta t)^2 + (1+\alpha_i \Delta t)^2 (\varepsilon_r - 1)\right] =$$
$$= \frac{10\ \mu\text{F}}{3}\left[(1+2\cdot 10^{-4}\cdot 15)^2 + (1+8\cdot 10^{-5}\cdot 15)^2 (3-1)\right] =$$
$$= 10.036\ \mu\text{F}$$

(4 boda)

4. zadatak (17 bodova)

Iz izraza *Q=CU* računa se naboj induciran na pločama svakog od kondenzatora:

Q_1= 200 μC, Q_2= 180 μC, Q_1= 140 μC, Q_1= 80 μC. **(1 bod)**



Nakon prespajanja, ukupan pad napona u krugu mora biti jednak nula (jer nema izvora):

$$U_1^{'} - U_2^{'} + U_3^{'} = 0 \quad (\text{ili } U_1^{'} - U_2^{'} + U_4^{'} = 0) \qquad \textbf{(3 boda)}$$

Drugi kondenzator je nabijen s obrnutim polaritetom od ostalih pa zato u gornji izraz ulazi s negativnim naponom **(2 boda)**. Upotrebom izraza *U=Q/C* dobiva se:

$$\frac{Q_1^{'}}{C_1} - \frac{Q_2^{'}}{C_2} + \frac{Q_3^{'}}{C_3} = 0 \qquad \textbf{(2 bod)}$$

odnosno:

$$\frac{Q_1^{'}}{4} - \frac{Q_2^{'}}{3} + \frac{Q_3^{'}}{2} = 0$$

$$3Q_1^{'} - 4Q_2^{'} + 6Q_3^{'} = 0 \qquad \textbf{(1 bod)}$$

Nadalje, suma naboja u čvorovima „X“, „Y“ i „Z“ mora biti ista prije i poslije spajanja (zakon sačuvanja naboja):

$$-Q_1^{'} - Q_2^{'} = -Q_1 - Q_2 = -380\ \mu\text{C} \qquad \textbf{(1 bod)}$$

$$Q_2^{'} + Q_3^{'} + Q_4^{'} = Q_2 + Q_3 + Q_4 = 400\ \mu\text{C} \qquad \textbf{(1 bod)}$$

(jednadžba za čvor „Z“ ne bi donijela ništa novo jer je linearna kombinacija gornje dvije).

Konačno, četvrta jednadžba se dobiva zahtijevajući da su padovi napona na kondenzatorima „3“ i „4“ jednaki:

$$\frac{Q_3'}{C_3} = \frac{Q_4'}{C_4}$$ **(1 bod)**

Iz ove posljednje odmah možemo izraziti Q'_4:

$$Q_4' = \frac{Q_3'}{2}$$

Druga od gornjih jednadžbi sada postaje:

$$Q_2' + \frac{3}{2}Q_3' = 400\ \mu\text{C}$$

odnosno:

$$2Q_2' + 3Q_3' = 800\ \mu\text{C}\ .$$

Uvrsti li se:

$$Q_1' = 380\ \mu\text{C} - Q_2'$$

u:

$$3Q_1' - 4Q_2' + 6Q_3' = 0$$

dobiva se:

$$-7Q_2' + 6Q_3' = -1140$$

a ova jednadžba u kombinaciji s:

$$2Q_2' + 3Q_3' = 800\ \mu\text{C}$$

daje:

$$Q_2' = 249.1\ \mu\text{C}$$
$$Q_1' = 130.9\ \mu\text{C}$$
$$Q_3' = 100.6\ \mu\text{C}$$
$$Q_4' = 50.3\ \mu\text{C}$$

(2 boda)

Odgovarajući naponi su:

$$U_1' = 32.7\ V$$
$$U_2' = 83.0\ V$$
$$U_3' = 50.3\ V$$
$$U_4' = 50.3\ V$$

(2 boda)

Kroz točku „T“ proteklo je 69.1 μC. **(1 bod)**